УДК 536.2:532.5

СМЕШАННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ЛОКАЛЬНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ВВОДА И ВЫВОДА МАССЫ В УСЛОВИЯХ НЕОДНОРОДНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Г.В. Кузнецов, В.И. Максимов

Томский политехнический университет
E-mail: elf@tpu.ru

Представлены результаты математического моделирования конвекции вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной полости с источниками ввода и отвода массы в сопряженной постановке в рамках приближения Буссинеска. Исследованы режимы смешанной конвекции в полости, имеющей две вертикальные и одну горизонтальную стенки конечной толщины, с двумя участками ввода и вывода жидкости, и одной свободной поверхностью. Рассмотрена плоская нестационарная задача в рамках модели Навье-Стокса для жидкой фазы и теплопроводности для твердой фазы. Получены распределения гидродинамических параметров и температур при использовании различных граничных условий на внешнем контуре рассматриваемой полости. Установлено, что даже при умеренном теплоотводе на внешних границах области решения приводит к масштабным изменениям в температурных полях жидкости.

1. Введение

При решении многих задач теплоэнергетики, строительства, химических технологий возникает необходимость анализа тепловых режимов объектов, представляющих собой полость, заполненную несжимаемой жидкостью при наличии источников ввода и отвода массы, значимых градиентов температур по всем координатным направлениям и теплообмена по внешнему контуру полости [1, 2]. В таких условиях может реализовываться режим смешанной конвекции, осложненный теплоотводом с внешних границ области решения. Во многих практически значимых случаях этот теплоотвод играет важную роль в формировании теплового режима объекта. До настоящего времени моделирование таких течений в сопряженной постановке [3–6], учитывающей влияние внешних условий на характер течения и температурное поле среды, не проводилось. Целью данной работы является численное моделирование смешанной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной полости с источниками ввода и вывода массы в условиях теплообмена с внешней средой в сопряженной постановке.

2. Физическая модель

Рассматривается течение несжимаемой вязкой жидкости и теплообмен в полости, имеющей две вертикальные, одну горизонтальную стенки конечной толщины и одну свободную поверхность, с участком ввода и вывода жидкости (рис. 1).

При постановке задачи принимается, что температура вводимой жидкости существенно превышает начальную температуру среды в полости и считается известной. Массовый приход также является известной величиной. На внешних границах области заданы неоднородные граничные условия. Неоднородность обусловлена различными теплофизическими характеристиками внешних сред и условиями теплообмена на границах области решения. Жидкость считается вязкой, теплопроводной, режим течения ламинарным. Отток массы с верхней границы за счет испарения не учитывается. Все границы, кроме участков ввода и отвода массы, считаются непроницаемыми для жидкости. Теплофизические свойства жидкости и твердой фазы не зависят от температуры.

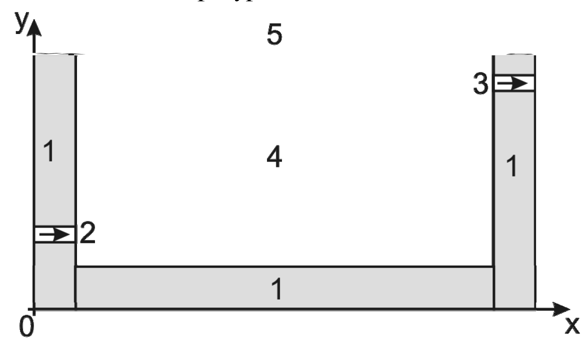


Рис. 1. *Область решения задачи: 1) твердая фаза; 2, 3) область ввода и вывода жидкости в полость; 4) полость с жидкостью; 5) свободная поверхность жидкости*

Задача рассматривается в нестационарной постановке в связи с необходимостью учета способности материала твердых стенок аккумулировать тепло и значительными перепадами температур между вводимой в полость жидкостью и начальной температурой твердых стенок. В общем случае возможны различные варианты расположения отверстий для ввода и вывода жидкости. Рассматриваются наиболее типичные варианты (рис. 1), реализация которых приводит к формированию наиболее интересных для анализа структур течения жидкости. При постановке задачи также предполагается, что контакт на границах раздела «жидкость – твердая стенка» идеален, а условия теплообмена на внешних границах области решения не зависят от времени.

Особое значение в задаче имеют граничные условия на внешних границах области решения (рис. 1). Эти условия определяют интенсивность теплоотвода с внешних границ и могут оказывать существенное влияние на режим течения жидкости. Соответственно, возможно изменение интенсивности теплопереноса в жидкости. Исходя из анализа различных вариантов реализации рассма-

триваемой схемы на практике можно на правой, левой и нижней границах области решения выставлять граничные условия 1–3 или 4-го рода. Но для корректного использования условий четвертого рода необходимо расширить размеры области решения путем ввода дополнительных подобластей до значений x и y, при которых фронт прогрева в любых режимах не доходит до этих внешних границ. Такой подход существенно усложняет алгоритм решение задачи. Использование условий теплоизоляции на внешних границах области решения (рис. 1) не является правомерным, т. к. в реальных условиях при различных градиентах температур всегда осуществляется сток тепла во внешнюю среду с этих границ. По этим причинам для анализа были выбраны граничные условия первого и второго рода на границах внешнего контура.

Ещё одна особенность рассматриваемой задачи заключается в граничных условиях на свободной поверхности, как для уравнения энергии, так и для уравнений движения. На практике эти условия не могут быть определены точно. При постановке задач математического моделирования решение сопряженной задачи и на этой границе создает практически непреодолимые препятствия в связи с трудностями описания свободноконвективного течения газовой (как правило, воздушной) среды вблизи свободной поверхности движущейся жидкости. Примеров реализации таких задач пока нет. По этим причинам область решения в рассматриваемом случае ограничивалась сверху свободной поверхностью. Предполагалось, что на этой границе реализуются условия выполнения граничных условий третьего рода для уравнения энергии, а также равенство сдвиговых напряжений в газе и жидкости на свободной поверхности. В такой интерпретации постановка задачи предусматривала возможность образования на этой поверхности элементов циркуляционных течений, обусловленных как естественной, так и вынужденной конвекцией.

При решении свободно-конвективных задач теплообмена чаще всего на внешних границах используются условия первого рода для уравнения энергии [7–10]. Такой подход удобен при численной реализации и в целом не выглядит противоречивым. Но анализ типовых примеров подобных задач показывает, что условия первого рода в целом почти адекватны условиям теплоизоляции. По этой причине они не соответствуют реальным режимам теплообмена на практике и могут быть использованы только в качестве условий для модельных задач. Но в этом качестве они являются элементами эталонных задач, решения которых играют роль своеобразных «измерительных приборов» при оценке тех или иных значимых физических эффектов на внешних границах областей решения. В данной работе оценка масштабности влияния теплоотвода с внешнего контура также проводилась путем сравнения с результатами решения такой «эталонной» задачи с граничными условиями первого рода на вертикальных (за исключением участков ввода и вывода жидкости) границах и на нижней («несвободной») границе.

Следует также отметить, что моделирование теплоотвода с трех внешних («твердых») границ области решения проводилось путем использования граничных условий второго рода. При этом величина отводимого теплового потока q являлась параметром задачи и выбиралась исходя из реального диапазона его возможного изменения. Такой прием позволяет не расширять область решения до размеров, при которых с одной стороны было бы правомерным применение условий четвертого рода на границах сопряжения разнородных сред. Но с другой стороны такое расширение области анализа делало практически невозможным сам численный анализ рассматриваемой нелинейной задачи. Выбор же значений q всегда может быть проведен с требуемой для практики или для обоснования достоверности результатов теоретического анализа точностью. Так, например, такой выбор может быть реализован по итерационной схеме путем расчета на каждой последующей итерации величины q, исходя из полученного на предыдущей итерации градиента температур вблизи границы. Кроме этого достаточно точно могут быть определены величины q, исходя из исходных данных каждой задачи. Последнее создает объективные условия для получения достоверных результатов.

3. Математическая модель и метод решения

Постановка задачи по пространственным координатам является двухмерной и описывается системой нестационарных уравнений Навье-Стокса для жидкой фазы и уравнением теплопроводности для твердой фазы [7, 8].

Для приведения системы уравнений к безразмерному виду использовались следующие соотношения:

$$X=\frac{x}{L},\quad Y=\frac{y}{L},\quad \tau=\frac{t}{t_0},\quad U=\frac{u}{V_{in}},\quad V=\frac{v}{V_{in}},$$

$$\Theta=\frac{T-T_0}{\Delta T},\quad \Psi=\frac{\psi}{\psi_0},\quad \Omega=\frac{\omega}{\omega_0},$$

$$\Delta T=T_{in}-T_0,\quad \psi_0=V_{in}L,\quad \omega_0=\frac{V_0}{L},$$

где x,y – координаты; u,v – скорости по осям x,y; X,Y и U,V – безразмерные координаты и скорости, соответствующие x,y и u,v; L – длина полости по оси x; – масштаб времени; τ – безразмерное время; V_{in} – масштаб скорости (скорость входного потока); Θ – безразмерная температура; T_0 – температура жидкости и твердого тела в начальный момент времени; T_{in} – температура входного потока; ψ – функция тока и ψ_0 – ее масштаб; Ψ – безразмерный аналог ψ; ω – вихрь скорости и ω_0 – его масштаб; Ω – безразмерный аналог ω.

Соответственно безразмерные уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска в пере-

менных «вихрь скорости – функция тока – температура» для жидкой фазы (режим смешанной конвекции) и уравнение теплопроводности для твердой фазы будут иметь вид:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}+U\frac{\partial\Omega}{\partial X}+V\frac{\partial\Omega}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}\right)+\frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right),\quad(1)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+U\frac{\partial\Theta}{\partial X}+V\frac{\partial\Theta}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}\right),\quad(2)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}=\Omega,\quad(3)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\,\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2},\quad(4)$$

здесь $\mathrm{Gr}=\dfrac{g\beta L^3\Delta T}{\nu^2}$ – число Грасгофа; β – температурный коэффициент объемного расширения; g – ускорение, создаваемое массовыми силами; $\mathrm{Re}=\dfrac{2VL}{\nu}$ – число Рейнольдса; $\mathrm{Pr}=\dfrac{\nu}{a}$ – число Прандтля; $\mathrm{Fo}=\dfrac{at_0}{L^2}$ – число Фурье; a – коэффициент температуропроводности.

Начальные условия:

$$\Psi(X,Y,0)=0,$$
$$\Omega(X,Y,0)=0,$$
$$\Theta(X,Y,0)=0.$$

Граничные условия:

– на внешнем контуре рассматриваемой области (кроме свободной поверхности жидкости) в одном варианте задаются граничные условия первого рода Θ=0, а в другом – второго рода $\dfrac{\partial\Theta}{\partial n}=\mathrm{Ki}$;

– на свободной поверхности жидкости:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial X}=0,\quad\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}=0,$$

$$\frac{\partial\Theta_f(X,Y)}{\partial Y}=\mathrm{Bi}\cdot\Theta_f(X,Y)+\mathrm{Bi}\cdot\frac{T_0-T_e}{T_{in}-T_0};$$

– на внутренних границах раздела твердой и жидкой фаз, параллельных осям $0Y(0X)$:

$$\Psi=0,\quad\frac{\partial\Psi}{\partial X(Y)}=0,$$

$$\begin{cases}\Theta_w=\Theta_f\\ \dfrac{\partial\Theta_w}{\partial X(Y)}=\lambda_{w,f}\dfrac{\partial\Theta_f}{\partial X(Y)}\end{cases};$$

– на участке ввода жидкости:

$$\Theta=1,$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial Y}=1;$$

– на участке оттока жидкости:

$$\frac{\partial\Theta(X,Y)}{\partial Y}=0,$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial Y}=1;$$

здесь $\mathrm{Ki}=\dfrac{qL}{\lambda_w(T_{in}-T_0)}$ – число Кирпичева; $\mathrm{Bi}=\dfrac{\alpha L}{\lambda}$ – число Био; n – координата по нормали к рассматриваемой поверхности; α – коэффициент теплообмена между внешней средой и рассматриваемой областью решения по границе y=0; T_e – температура окружающей среды; λ_w, λ_f – коэффициенты теплопроводности твердой и жидкой фаз; $\lambda_{w,f}$ – относительный коэффициент теплопроводности.

Задача (1–4) с соответствующими граничными и начальными условиями решена методом конечных разностей [7].

Уравнения решались последовательно, каждый временной шаг начинался с вычисления поля температуры в газовой и в твердой фазах, затем решались уравнения Пуассона (3) для векторного потенциала. Далее определялись граничные условия для компонент вектора завихренности и решались уравнения движения.

При решении системы уравнений (1–3) в качестве начального приближения использовались стационарные решения, полученные в задачах при малых числах Рейнольдса.

4. Анализ результатов численного моделирования

Численные исследования были проведены при следующих значениях:

– безразмерных величин: $\mathrm{Pr}=7{,}1$, $100\le\mathrm{Re}\le1000$, $\mathrm{Gr}\le10^5$;

– температур T_0=293 K, $300\le T_{in}\le343$ K, $273\le T_e\le293$ K.

Диапазоны изменения безразмерных величин и размерных характеристик выбирались исходя из следующих условий. Первое – соответствие диапазонам изменения параметров в реальных вариантах реализации таких систем, как «жидкость – твердое тело – газообразная внешняя среда». Второе – реальные масштабы существования как вынужденной, так и естественной конвекции без вырождения какого-либо из механизмов теплопереноса. Кроме того, контролировались условия геометрического подобия реальных систем и используемой при математическом описании процесса модели. Также рассматривались не самые благоприятные для реализации «сопряженного» теплопереноса [8] диапазоны изменения как размерных величин, так и безразмерных комплексов. Так, например, увеличение температуры вводимой в рассматриваемую полость жидкости, например, воды на 20...30° могло существенно изменить (при прочих равных условиях) соотношение между характерными временами реализации процесса вынужденной и естественной конвекции, но экстремальные варианты не рассматривались.